Systèmes Non Linéaires

Mohamed AOUN

Mail : mohamed.aoun@gmail.com
Skype : aounmed
Bureau : Labo 9

Laboratoire de Recherche
MACS

Plan

Introduction
Méthode du premier harmonique
Méthode de plan de phase
Méthode de Lyapunov

Scanné avec CamScanner

Chapitre I

Introduction

Système linéaire

Définition

Un système linéaire s'il est décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

On peut associer au système, à l'aide de la transformation de Laplace, une transmittance $H(p)$ qui est une fraction rationnelle en $p = j\omega$.

Les méthodes d'étude des systèmes linéaires sont très puissantes en raison des outils disponibles

Scanné avec CamScanner

Limitations des méthodes linéaires

Définition

- Aucun système physique n'est complètement linéaire. Les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint ;
- Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement, à des systèmes linéaires. Un exemple simple est le relais, que ce soit sous sa forme électromagnétique ancienne ou sous sa forme électronique (transistor en commutation, thyristor, etc.);
- Certains phénomènes ne peuvent pas être décrits par des modèles et méthodes linéaires. Par exemple,

  1. la pression limitée due au seuil alors que la théorie classique prévoit une précision parfaite si le système comporte un intégrateur pur

  2. le phénomène de pompage caractérisé par des oscillations périodiques, alors que la théorie linéaire ne prévoit que des états stables ou instables.

Système non linéaire - définition

Définition !

Par définition, un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

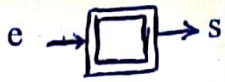
Cette définition, ou plutôt cette non-définition explique la complexité et la diversité des système non linéaire et **des méthodes qui s'y appliquent.** diversité

Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines **classes de systèmes non linéaires.**

On se limitera dans ce cours à l'étude des systèmes asservis non linéaires, c'est-à-dire d'asservissements qui contiendront un (voire plusieurs) éléments non linéaires. Ces éléments devront en outre appartenir à des types bien définis de non-linéarités.

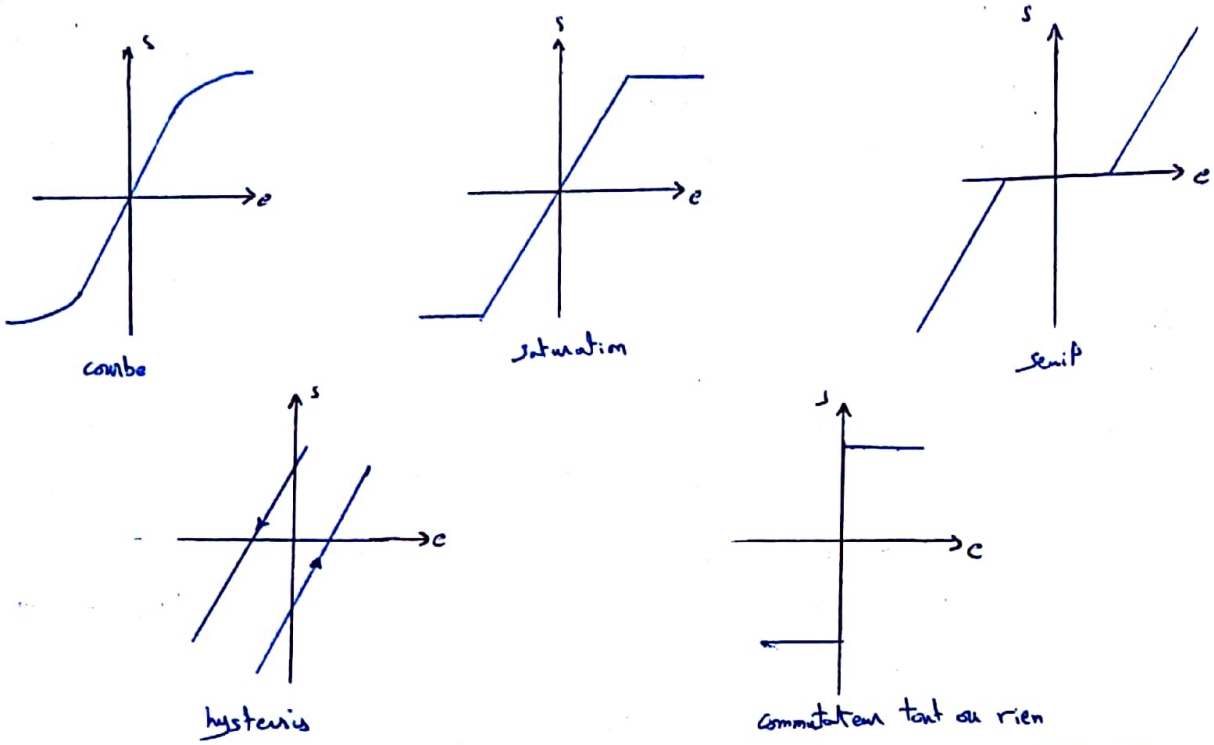
Scanné avec CamScanner

Non-linéarités de base



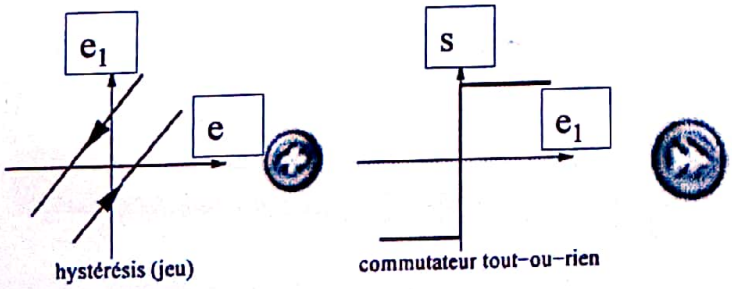
Cinq non-linéarités de base peuvent se combiner pour former des non-linéarités plus complexes.

$\frac{1,5}{1+\tau p} \Rightarrow 1,5$



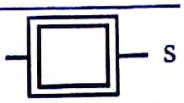
Combinaison des non-linéarités de base

Plusieurs combinaisons des non-linéarités de base sont possibles

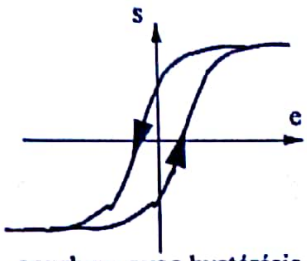


Scanné avec CamScanner

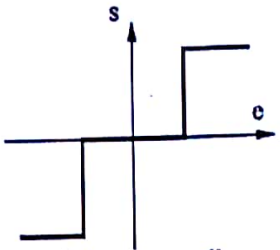
Combinaison des non-linéarités de base



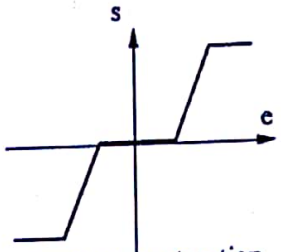
Ces cinq non-linéarités et leurs combinaisons permet de representer a peu prés tous les types de non linéaires rencontrés dans les système asservies



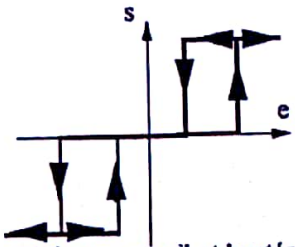
courbure avec hystérésis



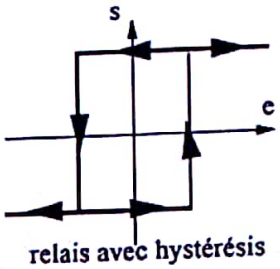
relais avec seuil



seuil avec saturation



relais avec seuil et hystérésis



relais avec hystérésis

Classes des non-linéarités

Remarque :

- ***Les caractéristiques des 5 non-linéarités de base sont*** statique.
- ***Les 5 non-linéarités de base*** *ne modélisent pas les phénomènes dynamiques comme des* temps *de commutation (relais ou transistor) ou des différences de comportement selon les fréquences.*

Classes des non-linéarités

On peut classer les non-linéarités en plusieurs catégories selon leurs propriétés :

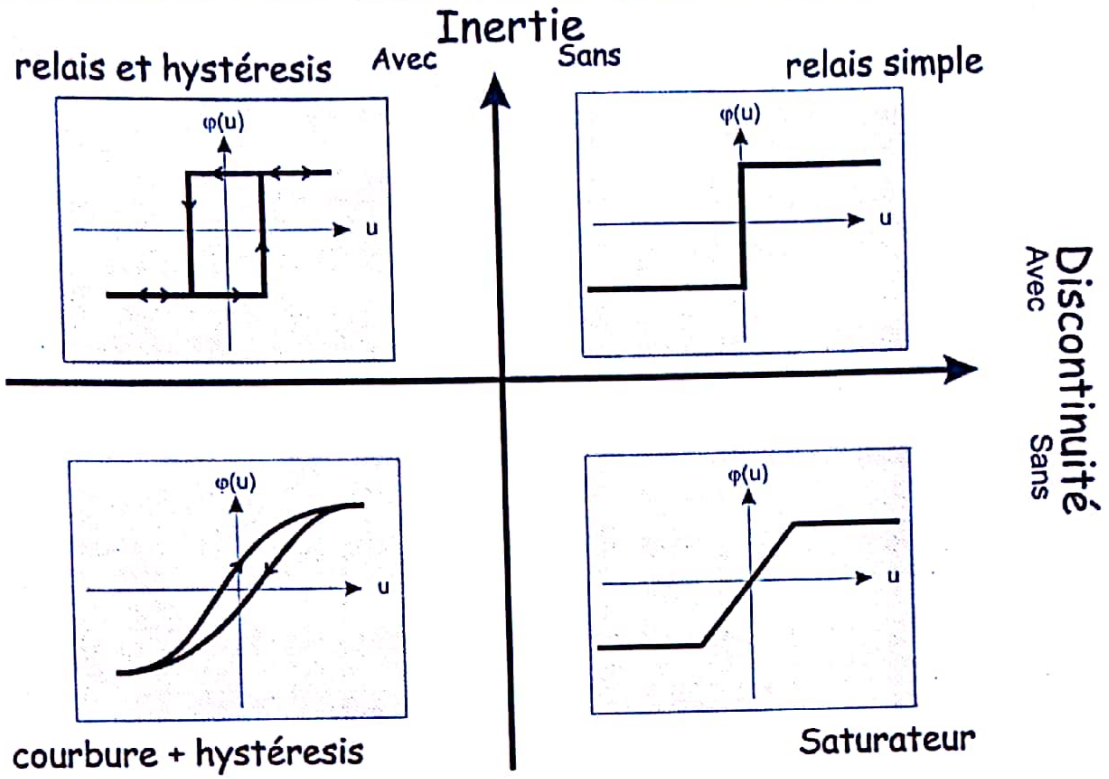
– des non-linéarités continues (courbures) ou discontinues (relais);

– des non-linéarités avec ou sans mémoires (toutes celles avec hystérésis);

– des non-linéarités accidentelles, c'est-à-dire dues aux imperfections des composants (saturation d'un amplificateur, jeu), ou essentielles, c'est-à-dire liées à la nature même du composant (relais);

Scanné avec CamScanner

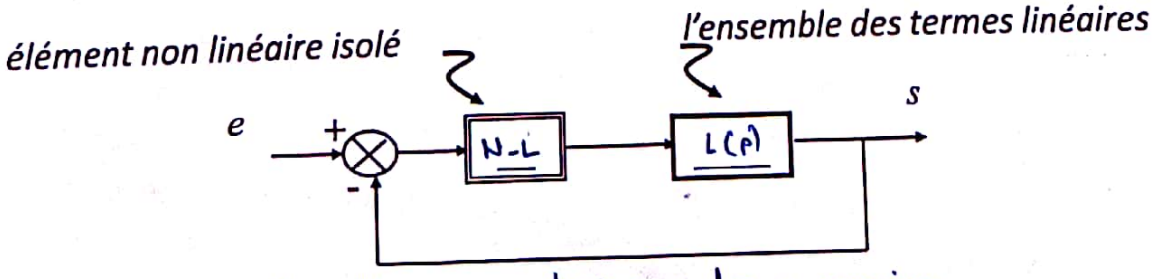
Classes des non-linéarités



Systèmes asservis possédant un seul élément non linéaire *forme canonique*

Dans de nombreux cas, un seul élément non linéaire, et l'on peut généralement le séparer (hypothèse de séparabilité) des autres éléments linéaires du système.

On peut montrer que l'étude de tels systèmes à un élément non linéaire séparable peut toujours se ramener à l'étude d'un système non linéaire canonique, constitué dans la chaine direct d'un élément non linéaire isolé (bloc avec la double bordure) suivi d'un système linéaire noté *L(p)* (qui regroupe l'ensemble des termes linéaires), et d'un retour unitaire.

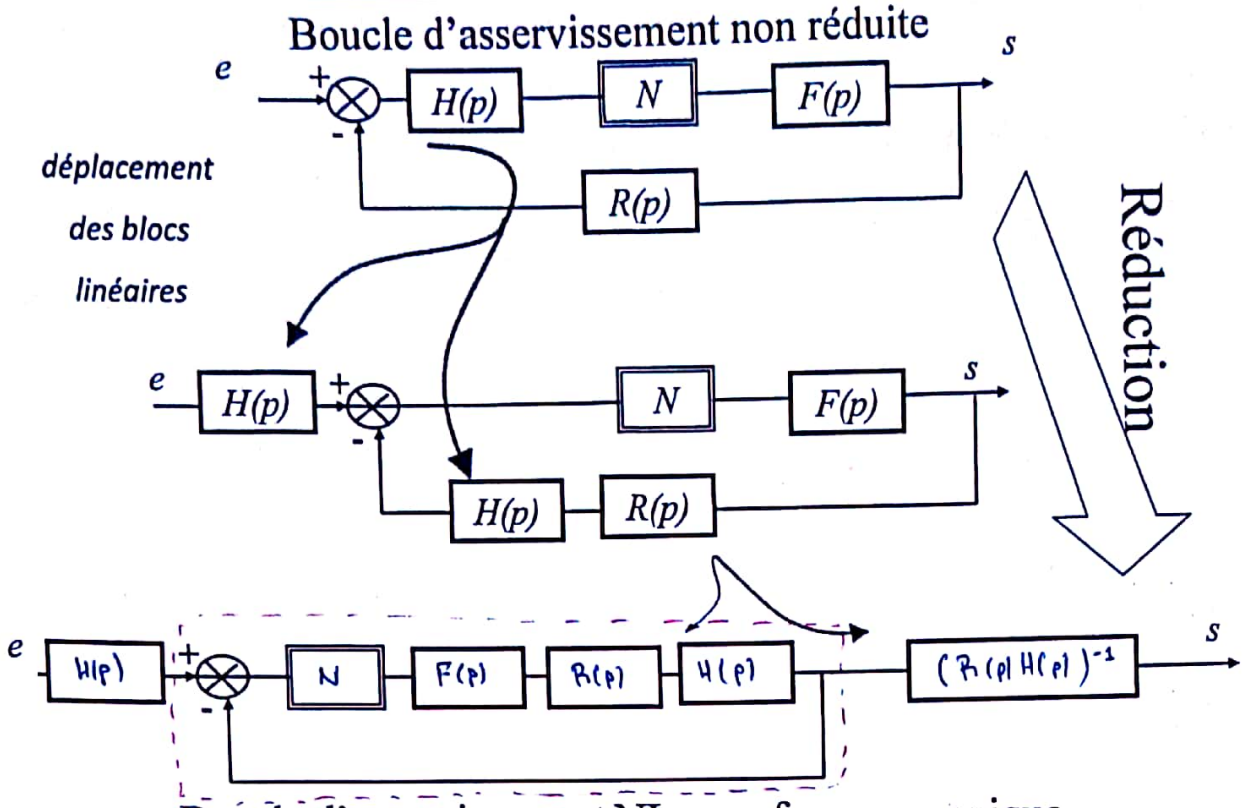


Boucle d'asservissement NL sous forme canonique

Scanné avec CamScanner

Forme canonique et réduction

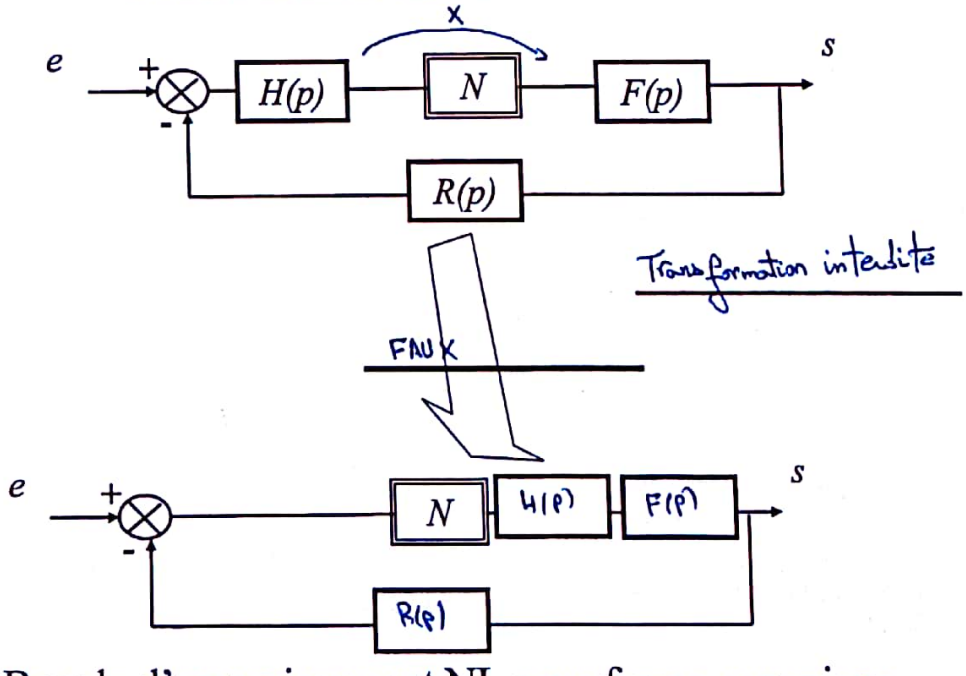
Boucle d'asservissement non réduite



Boucle d'asservissement NL sous forme canonique

Forme canonique et réduction

Boucle d'asservissement non réduite



~~Boucle d'asservissement NL sous forme canonique~~

Attention *aux transformations interdites : on ne doit pas intervertir un bloc linéaire avec un bloc non linéaire, car la réponse de l'élément non linéaire dépend de l'amplitude.*

Scanné avec CamScanner

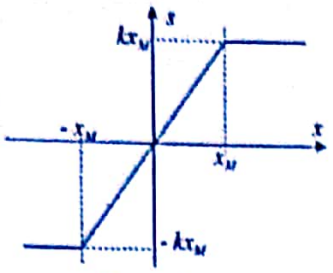
Méthodes d'études des systèmes asservis non linéaires

Dans ce cours, nous proposons **deux méthodes** d'étude des systèmes asservis non linéaires.

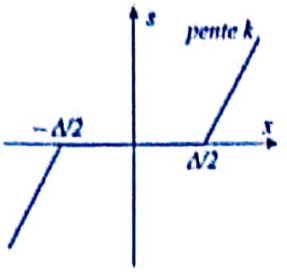
La méthode de premier harmonique est une généralisation de la méthode harmonique classique utilisée pour les systèmes linéaires. Le principe consiste à réaliser une *linéarisation dans le domaine fréquentiel* afin de généraliser la notion de fonction de transfert au cas NL. C'est une ***méthode approchée*** qui s'applique pour des systèmes à une non-linéarité séparable et qui suppose que la partie linéaire du système asservi se comporte comme un filtre passe bas.

La méthode de plan de phase est un cas particulier (dimension 2) de la méthode très générale de l'espace de phase. Cette méthode est rigoureuse et permet d'étudier des *systèmes non linéaires quelconques*. En revanche, il est souvent difficile de trouver les solutions de façon analytique. L'intérêt actuel de cette méthode est lié à la puissance des calculateurs, qui permettent d'intégrer numériquement les équations et de *calculer soit numériquement soit graphiquement les solutions*.

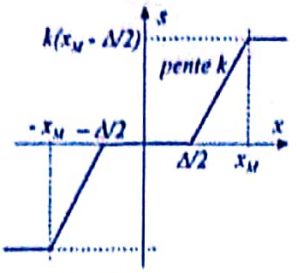
Scanné avec CamScanner



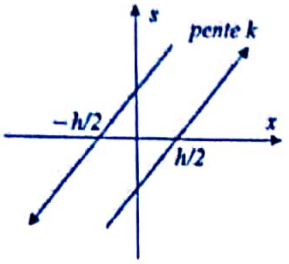
Saturation



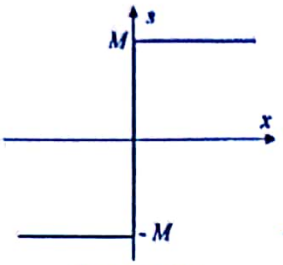
Seuil



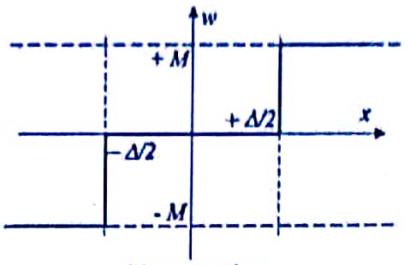
Seuil et saturation



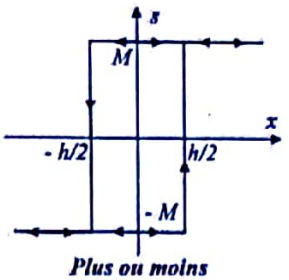
Hystérésis



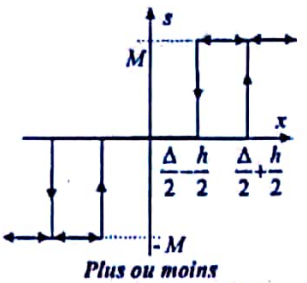
Plus ou moins



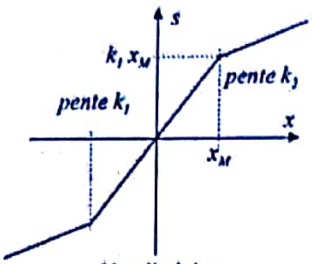
Plus ou moins avec seuil



Plus ou moins avec hystérésis



Plus ou moins avec seuil et hystérésis



Non linéaire par morceaux

Gain complexe de NL

Le tableau ci après donne les gains complexes correspondant aux caractéristiques des NL de la diapositive précédente.

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{, pour } u \le -1 \\ \frac{2}{\pi}\left[\arcsin u + u\sqrt{1-u^2}\right] & \text{, pour } |u| < 1 \\ +1 & \text{, pour } u \ge -1 \end{cases}$$

forme x(t) = x1 sin(ωt)

– la fonction f :

Non-linéarité	Gain complexe équivalent
Saturation	$N_P = kf\left(\frac{x_M}{x_1}\right)$ $N_Q = 0$
Seuil	$N_P = k\left[1 - f\left(\frac{\Delta}{2x_1}\right)\right]$ $N_Q = 0$
Seuil et saturation	$N_P = k\left[1 - f\left(\frac{x_M}{x_1}\right) - f\left(\frac{\Delta}{2x_1}\right)\right]$ $N_Q = 0$
Hystérésis	$N_P = \frac{k}{2}\left[1 + f\left(1 - \frac{h}{x_1}\right)\right]$ $N_Q = -\frac{2kh}{\pi x_1}\left(1 - \frac{h}{2x_1}\right)$
Plus ou moins	$N_P = \frac{4M}{\pi x_1}$ $N_Q = 0$
Plus ou moins avec seuil	$N_P = \frac{4M}{\pi x_1}\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{2x_1}\right)^2}$ $N_Q = 0$
Plus ou moins avec hystérésis	$N_P = \frac{4M}{\pi x_1}\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2x_1}\right)^2}$ $N_Q = -\frac{2M h}{\pi x_1^2}$
Plus ou moins avec seuil et hystérésis	$N_P = \frac{2M}{\pi x_1}\left[\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta+h}{2x_1}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta-h}{2x_1}\right)^2}\right]$ $N_Q = -\frac{2M h}{\pi x_1^2}$
Non linéaire par morceaux	$N_P = (k_1 - k_2)f\left(\frac{x_M}{x_1}\right) + k_2$ $N_Q = 0$

Scanné avec CamScanner

Chapitre II

Méthode du premier harmonique

Rappel

https://www.youtube.com/watch?v=Nvyh_BRSBgQ[redacted]

Scanné avec CamScanner

Principe de la méthode de premier harmonique
Réponse harmonique d'une NL

$x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ → [N] → $s(t) = ?$

Pour un système NL, à une excitation sinusoïdale de pulsation ω :
x(t) = x1sin(ωt) est associée une réponse périodique de période T = 2π/ω, mais non sinusoïdale.
La réponse ***s(t)*** étant périodique, on peut la développer en **séries de Fourier.** En supposant que la moyenne s_0 de *s(t)* est nulle, on a :

$$s(t) = s_1 \sin(\omega t + \phi_1) + s_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \ldots + s_k \sin(k\omega t + \phi_k)$$

L'approximation du premier harmonique consiste à conserver uniquement le premier terme en ω :

$$s(t) \approx s_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

Les autres termes, en 2ω, 3ω, ...
étant supposé filtrés **par le reste du système.**

Principe de la méthode de premier harmonique
- Gain complexe

Par analogie au cas linéaire, on peut introduire une fonction de transfert généralisée ou équivalente, notée $N(x_1, \omega)$, qui dépend en particulier de l'amplitude du signal d'entrée

$x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ → [$N(x_1, \omega)$] → $s(t) \approx s_1 \sin(\omega t + \phi_1)$.

Le gain complexe équivalent s'écrit alors :

$$N(x_1, \omega) = \frac{s_1 e^{j(\omega t + \phi_1)}}{x_1 e^{j(\omega t)}}$$

$$N(x_1, \omega) = \frac{s_1}{x_1} e^{j\phi_1}$$

↳ Module $|N(x_1, \omega)| = \frac{s_1}{x_1}$

↳ Phase $\arg(N(x_1, \omega)) = \phi_1$

Scanné avec CamScanner

Principe de la méthode de premier harmonique -Gain complexe

$x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ → [$N(x_1, \omega)$] → $s(t) \approx s_1 \sin(\omega t + \phi_1)$.

Le gain complexe équivalent : $N(x_1, \omega) = \frac{s_1}{x_1} e^{j\phi_1}$

Cette approche présente deux différences essentielles par rapport à la fonction de transfert utilisée pour les systèmes linéaires :

– il s'agit d'une approximation **dont il faudra vérifier le bien-fondé;**

– le gain complexe équivalent dépend de la pulsation et aussi de l'amplitude x1 de l'excitation

Condition de validité

Condition de validité $x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ → [$N(x_1, \omega)$] → $s(t) \approx s_1 \sin(\omega t + \phi_1)$.

3

Il faut vérifier deux conditions pour pouvoir appliquer la méthode du premier harmonique à un système asservi non linéaire :

1. Condition de séparabilité : le système asservi possède un seul bloc NL qu'il est possible d'isoler. Les autres éléments sont supposés linéaires, au moins approximativement.

2. Condition de filtrage : la partie linéaire du système asservi est un filtre passe bas qui filtre les termes en 2ω 3ω, etc. Ce qui rend acceptable l'approximation au premier harmonique dans le calcul du développement en séries de Fourier.

2

Cette dernière condition est qualitative, mais de sa pertinence dépend la qualité de l'approximation.

Scanné avec CamScanner

Fonction de transfert généralisée - Représentation graphique

$x(t)$ — $N(x_1, \omega)$ — $s(t)$

On considère la fonction de transfert généralisée N(x1, ω) associée à un élement NL. $N(x_1, \omega)$ peut être représentée graphiquement par une famille de lieu **de transfert gradués selon ω, chacun des lieux étant associé à une valeur de x_1.**

Généralement, puisque $N(x_1, \omega)$ est complexe, on la représente dans le plan de *Nyquist* ou dans le plan de *Nichols*,

Fonction de transfert généralisée - Elément NL statique ou sans inertie

$x(t)$ — $N(x_1, \omega)$

Le tracé et l'utilisation de la fonction de transfert généralisée est complexe dans le cas général, car celle-ci est une fonction de 2 variables.

On peut souvent considérer que **l'élément NL est statique** (sans mémoire / on dit aussi **sans inertie**) ne **dépend pas de la pulsation ω**. On peut alors écrire :

$$N(x_1, \omega) = N(x_1)$$

La fonction de transfert généralisée est alors appelée **fonction d'amplitude** ou **gain complexe équivalent**.

Ce gain complexe équivalent $N(x_1)$ se représente par un lieu unique (et non plus une famille), gradué en x_1.

on considère plutôt le lieu critique C(x1) = -1/N(x1), pour des raisons qui deviendront évidentes lorsque nous aborderons les problèmes de stabilité.

Scanné avec CamScanner

Calculs de gains complexes équivalents

$x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ — $N(x_1, \omega)$ — $s(t) \approx s_1 \sin(\omega t + \phi_1)$.

Le développement en série de Fourier d'un signal harmonique s'écrit

$$s(t) = \underbrace{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)}_{\text{premier harmonique}} + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) \ldots + a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t) + \ldots$$

avec
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(k\omega t)dt$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(k\omega t)dt$$

D'une façon générale, si la non-linéarité est impaire, le développement en séries de Fourier ne comporte de termes en cosinus : $a_k = 0, \forall k$.
Si la non-linéarité est sans mémoire et symétrique, elle est impaire et par consequent $a_k = 0, \forall k$

Premier harmonique

$$s(t) \approx a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

avec
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt$$
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt$$

Rappel

$$s(t) = s_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$
$$N(x_1, \omega) = \frac{s_1}{x_1} e^{j\phi}$$

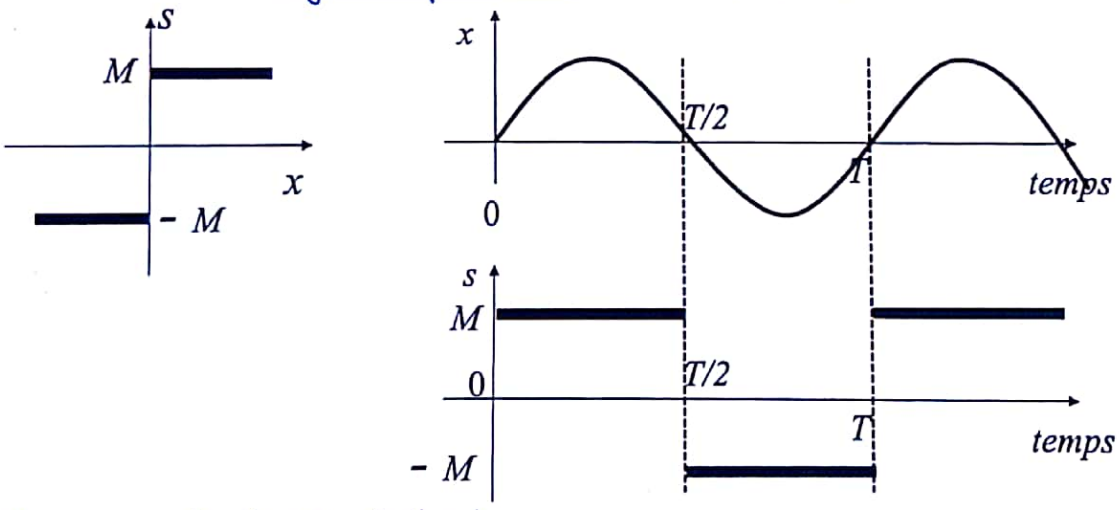
$$s_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,; \phi_1 = arctg\left(\frac{b_1}{a_1}\right)$$

Exemple de calculs de gains complexes équivalents

$x(t)$ — $N(x_1, \omega)$ — $s(t)$

- Relais idéal

On désire calculer le gain complexe d'un relais (+M,-M)



$$s(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

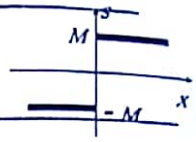
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt$$

▷ sans mémoire $a_1 = 0$

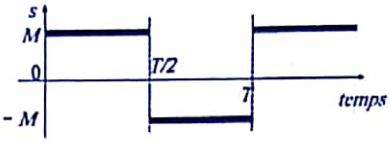
Scanné avec CamScanner

Exemple de calculs de gains complexes équivalents - Relais idéal



On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais (+M,-M)

$$s(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$



$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} M\cos(\omega t)dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-M)\cos(\omega t)dt$$

$$= \frac{2M}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^{T/2} - \frac{2M}{T}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{2M}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/2} - \frac{2M}{T}\left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_{T/2}^{T}$$

$$= 0$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} M\sin(\omega t)dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-M)\sin(\omega t)dt$$

$$= \frac{2M}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right]_0^{T/2} - \frac{2M}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{2M}{T}\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/2} - \frac{2M}{T}\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_{T/2}^{T}$$

$$= \frac{M}{\pi}(-(-1-1)) - \frac{M}{\pi}(-(1+1)) = \frac{2M}{\pi} + \frac{2M}{\pi} = \frac{4M}{\pi}$$

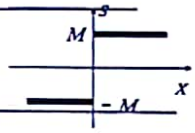
✎ $a_1 = 0$, prévisible car la NL est une fonction impaire

$$s(t) = \frac{4M}{\pi}\sin(\omega t)$$

↳ C'est la sinus qui approxime au mieux le critère (sortie)

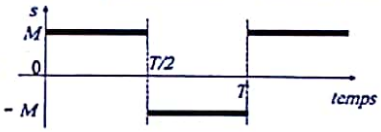
6

Exemple de calculs de gains complexes équivalents - Relais ideal (suite)



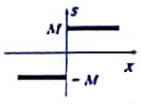
On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais (+M,-M)

$x(t) = x_1 \sin(\omega t)$ → **relais** →

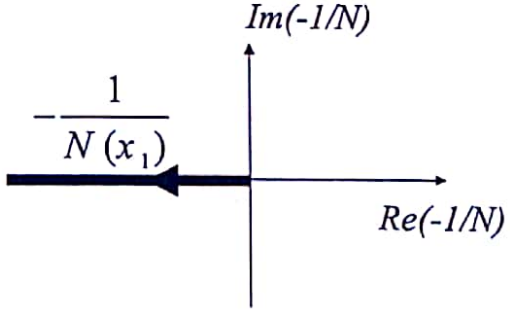


$$s(t) = \frac{4M}{\pi}\sin(\omega t)$$

$$s(t) = s_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$



$$N(x_1, \omega) = \frac{s_1}{x_1}e^{j\phi_1} = \frac{4M}{x_1\pi}$$

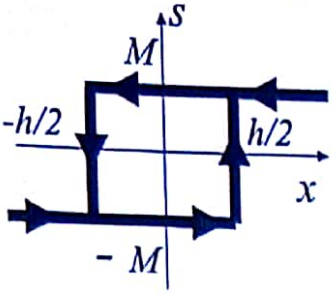


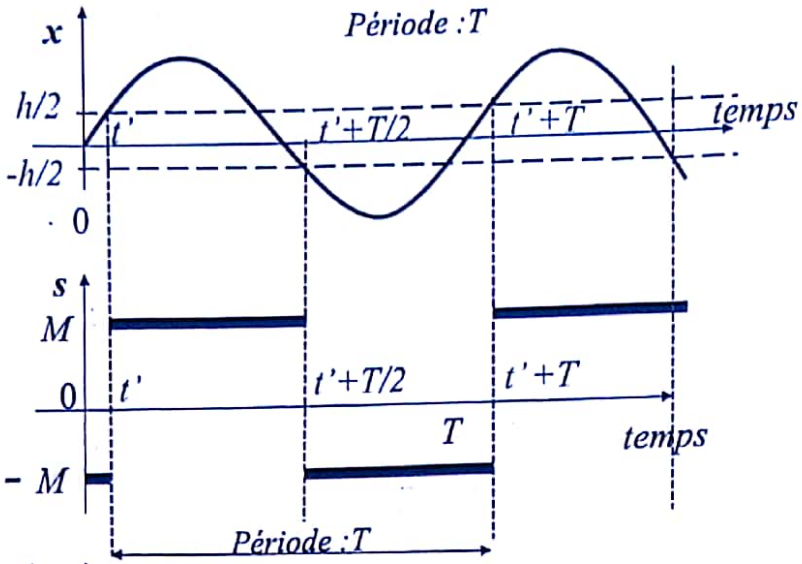
✎ Un relai est une NL **statique**, sans mémoire
le gain *N* ne dépend pas de la pulsation ω

Scanné avec CamScanner

Exemple de calculs de gains complexes équivalents - relais hystérésis

On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais hystérésis





$$s(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt$$

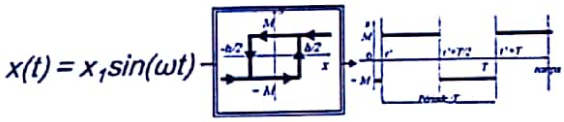
$$x(t') = x_1 \sin(\omega t') = \frac{h}{2}$$

$\omega t' = \sin^{-1}\frac{h}{2x_1}$

7

Exemple de calculs de gains complexes équivalents - relais hystérésis (suite)

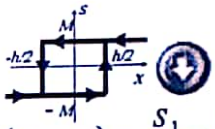
On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais hystérésis



$$a_1 = -\frac{4M}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t'\right)$$

$$b_1 = \frac{4M}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t'\right)$$

$$s(t) = \frac{4M}{\pi}\sin(\omega t - \omega t')$$

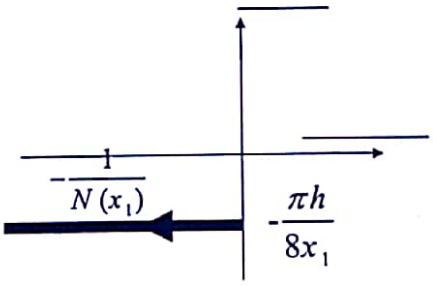


$$N(x_1,\omega) = \frac{s_1}{x_1}e^{j\phi} = \frac{4M}{x_1\pi}e^{-j\omega t'}$$

$$\frac{-1}{N(x_1,\omega)} = -\frac{x_1\pi}{4M}e^{j\omega t'}$$

avec $\omega t' = \sin^{-1}\frac{h}{2x_1}$

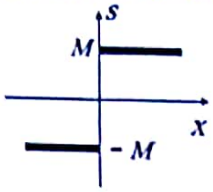
$$\frac{-1}{N(x_1,\omega)} = -\frac{x_1\pi}{4M}\sqrt{1-\left(\frac{h}{2x_1}\right)^2} - j\,\frac{\pi h}{8M}$$



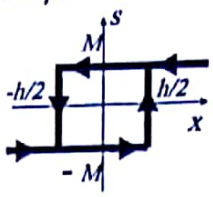
Scanné avec CamScanner

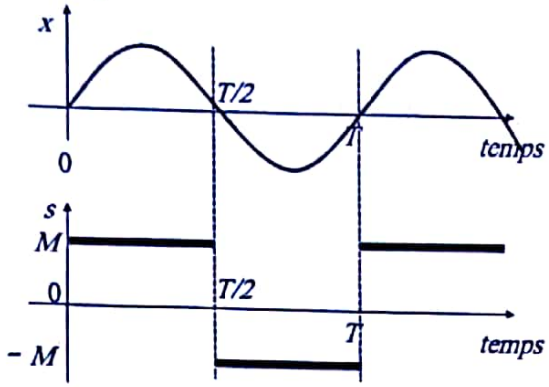
Exemple de calculs de gains complexes équivalents - relais idéal / relais hystérésis

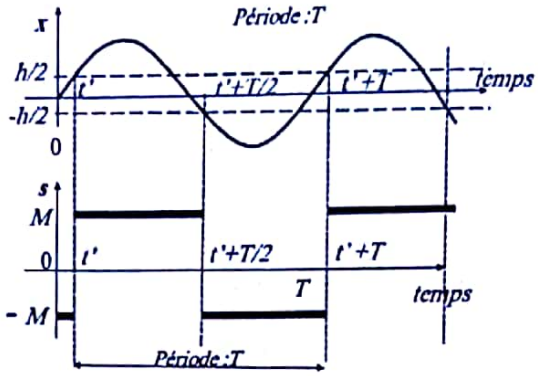
On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais hystérésis



$$N_{\text{relais}}(x_1,\omega)=\frac{4M}{x_1\pi}$$







C'est la même sortie que celle du relais. Elle est déphasée (retardée) de $\phi_1=-\frac{t'}{T}*2\pi$

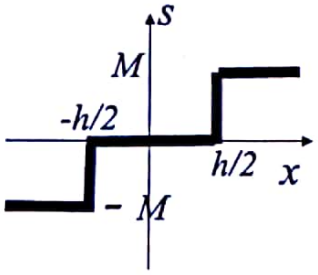
Nous déduisons alors pour un relais hystérésis

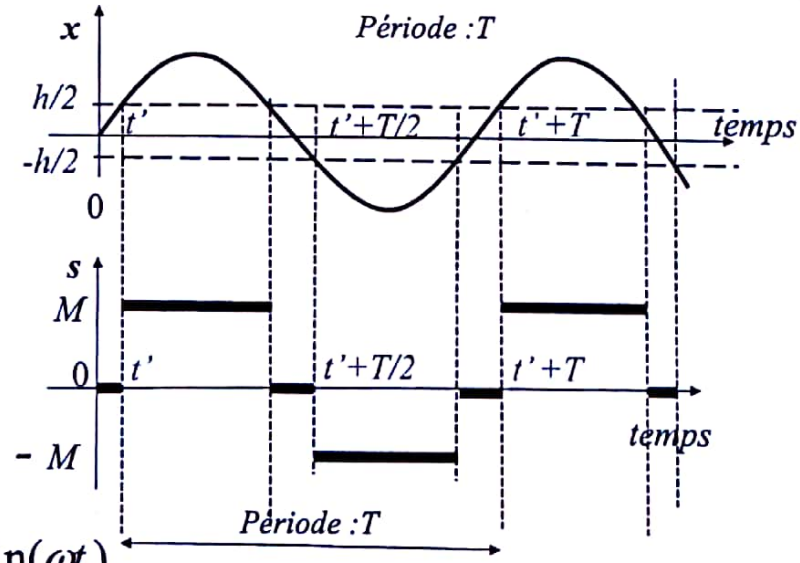
$$N_{\text{relais hystérésis}}(x_1,\omega)=\frac{4M}{x_1\pi}e^{-j\omega t'}$$

Exemple de calculs de gains complexes équivalents - relais avec seuil

4

On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais avec seuil





$$s(t)=a_1\cos(\omega t)+b_1\sin(\omega t)$$

$$a_1=\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt$$ ⇝ Null, non linéarité sans mémoire

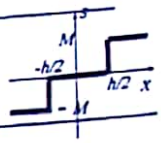
$$b_1=\frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt$$

$$x(t')=x_1\sin(\omega t')=\frac{h}{2}$$

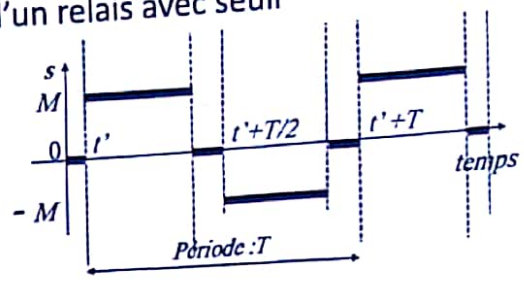
$$\omega t'=\sin^{-1}\frac{h}{2x_1}$$

Scanné avec CamScanner

Exemple de calculs de gains complexes équivalents - relais avec seuil

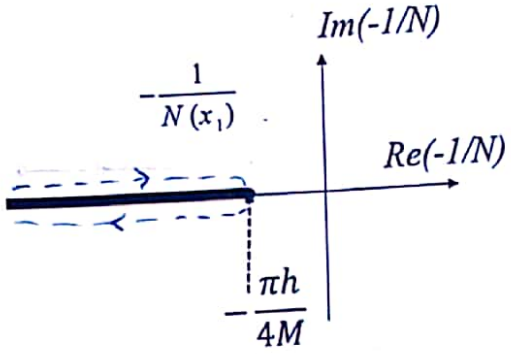


On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais avec seuil

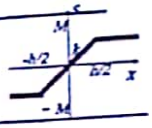


$$N(x_1) = \frac{4M}{x_1 \pi}\sqrt{1-\left(\frac{h}{2x_1}\right)^2}$$

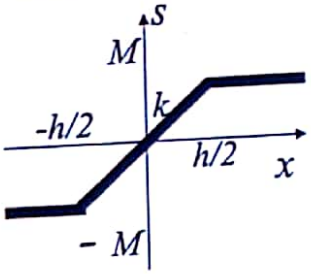
$$\frac{-1}{N(x_1)} = -\frac{x_1 \pi}{4M}\left(1-\left(\frac{h}{2x_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

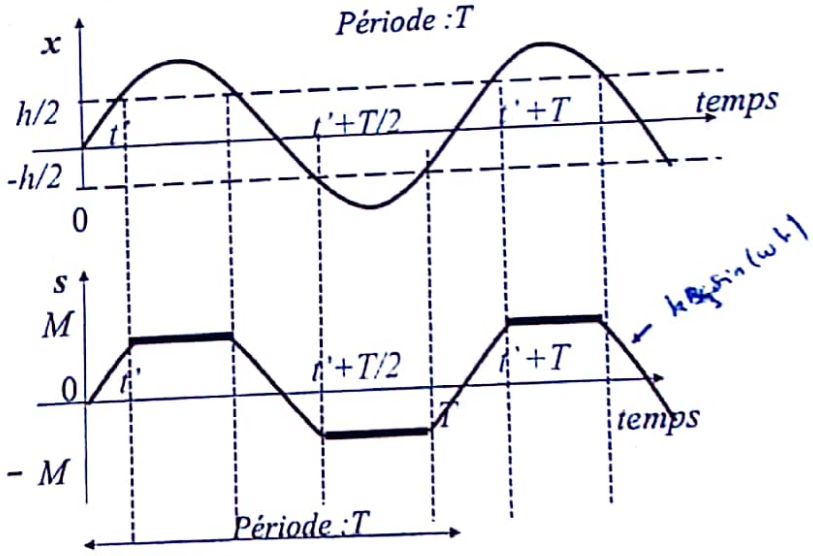


Exemple de calculs de gains complexes équivalents - saturation



On désire calculer le gain complexe équivalent d'un relais hystérésis





$$s(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$$

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\cos(\omega t)dt$$ ← Nul, non linéarité sans mémoire

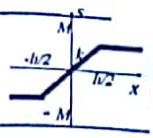
$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(\omega t)dt$$

$$x(t') = x_1 \sin(\omega t') = \frac{h}{2}$$

$$s(t') = s_1 \sin(\omega t') = k x_1 \sin(\omega t') = M$$

Scanné avec CamScanner

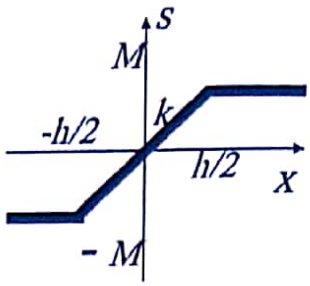
Exemple de calculs de gains complexes équivalents - saturation (suite)



On désire calculer le gain complexe équivalent d'une saturation

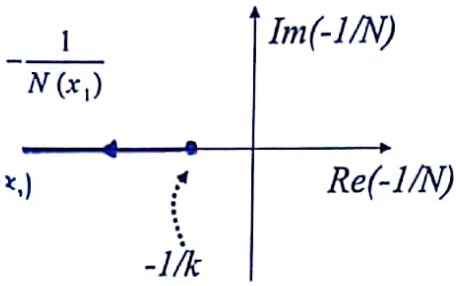
$$b_1 = \frac{2kx_1}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{M}{kx_1}\right)+\frac{2M}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{M}{kx_1}\right)^2}$$

$$s_1 = \left(\frac{2kx_1}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{M}{kx_1}\right)+\frac{2M}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{M}{kx_1}\right)^2}\right)\sin(\omega t)$$



$$N(x_1) = \frac{2k}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{M}{kx_1}\right)+\frac{2M}{\pi x_1}\sqrt{1-\left(\frac{M}{kx_1}\right)^2}$$

```
x1 = 1.1 : 0.1 : 100
N = 2*k/pi * asin(1/k./x) + 2/pi./x1 .* sqrt(1-1/k./x1)
C = -1./N
plot(Real(C), Img(C))
```



Exemple de calculs de gains complexes équivalents - NL définie par une équation mathématique

10

On désire calculer le gain complexe équivalent de la NL définie par

$$x \rightarrow \boxed{N} \rightarrow s = kx\left(1-\beta x^2\right)$$

Pour une entrée sinusoïdale $x(t) = x_1\sin(\omega t)$

$$s(t) = kx_1\sin(\omega t)\left(1-\beta\left(x_1\sin(\omega t)\right)^2\right)$$

$$= kx_1\sin(\omega t) - kx_1^3\beta\sin^3(\omega t)$$

$$= kx_1\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} - kx_1^3\beta\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)^3$$

$$= kx_1\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} - kx_1^3\beta\left(\frac{e^{3j\omega t}-3e^{j\omega t}+3e^{-3j\omega t}-e^{-3j\omega t}}{-8j}\right)$$

$$= kx_1\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j} - kx_1^3\beta\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3j\omega t}-e^{-3j\omega t}}{2j}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\right)\right)$$

$$= kx_1\sin(\omega t) - kx_1^3\beta\left(-\frac{1}{4}\sin(3\omega t)+\frac{3}{4}\sin(\omega t)\right)$$

1er harmonique

$$s(t) = kx_1\sin(\omega t) - kx_1^3\beta\left(0+\frac{3}{4}\sin(\omega t)\right)$$

Scanné avec CamScanner

Exemple de calculs de gains complexes équivalents
- NL définie par une équation mathématique (suite)

On désire calculer le gain complexe équivalent de la NL définie par

$$x \rightarrow \boxed{N} \rightarrow s = kx\left(1-\beta x^2\right)$$

s → *1er harmonique*

$$s(t) = kx_1\sin(\omega t) - kx_1^3\beta\left(0+\frac{3}{4}\sin(\omega t)\right)$$

$$= k\left(1-x_1^2\beta\left(\frac{3}{4}\right)\right)x_1\sin(\omega t)$$

$$= k\left(1-x_1^2\beta\left(\frac{3}{4}\right)\right)x(t)$$

$$N(x_1) = k\left(1 - x_1^2\beta\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

11

Exemple de calculs de gains complexes équivalents
- NL sans hystérésis définie par un polynôme – *Méthode de CYPKIN*

On désire calculer le gain complexe équivalent d'une NL sans hystérésis définie par un polynôme

$$x \rightarrow \boxed{N} \rightarrow s = f(x)$$

Méthode de CYPKIN

si $n \le 5$ $\quad N(x_1) = \frac{2}{3x_1}\left(f(x_1) + f\left(\frac{1}{2}x_1\right)\right)$

si $5 < n \le 11$ $\quad N(x_1) = \frac{2}{3x_1}\left(f(x_1) + f\left(\frac{1}{2}x_1\right) + \sqrt{3}f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right)\right)$

Scanné avec CamScanner

Exemple de calculs de gains complexes équivalents
- NL sans hystérésis définie par un polynôme – *Méthode de CYPKIN*

On désire calculer le gain complexe équivalent d'une NL définie par

$$x \rightarrow \boxed{N} \rightarrow s = kx\left(1-\beta x^2\right)$$

$$s = kx - \beta k x^3$$

Méthode de CYPKIN $f(x) = kx - \beta k x^3$

$$N(x_1) = \frac{2}{3x_1}\left(kx_1 - \beta k x_1^3 + \frac{k}{2}x_1 - \frac{\beta k}{8}x_1^3\right)$$

$$= k\left(1-\beta x_1^2\right)$$

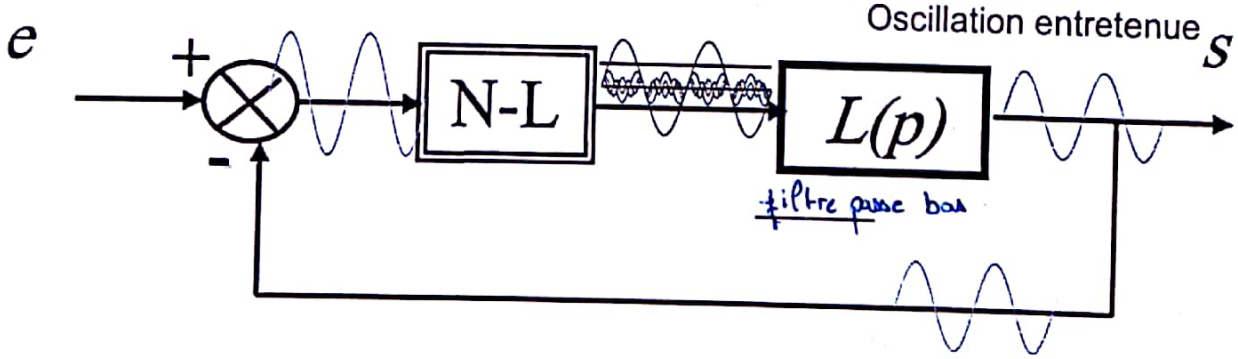
n=365

Stabilité des systèmes asservis non linéaires

12

Stabilité des oscillations



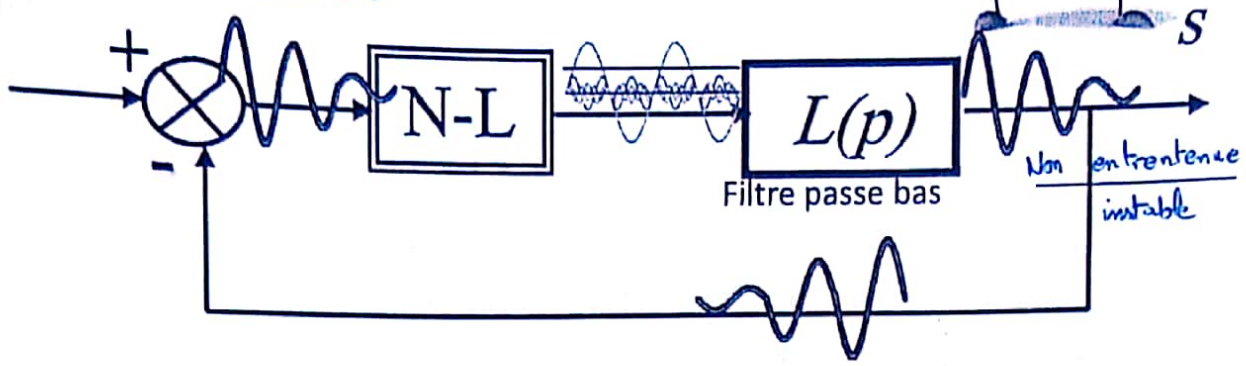


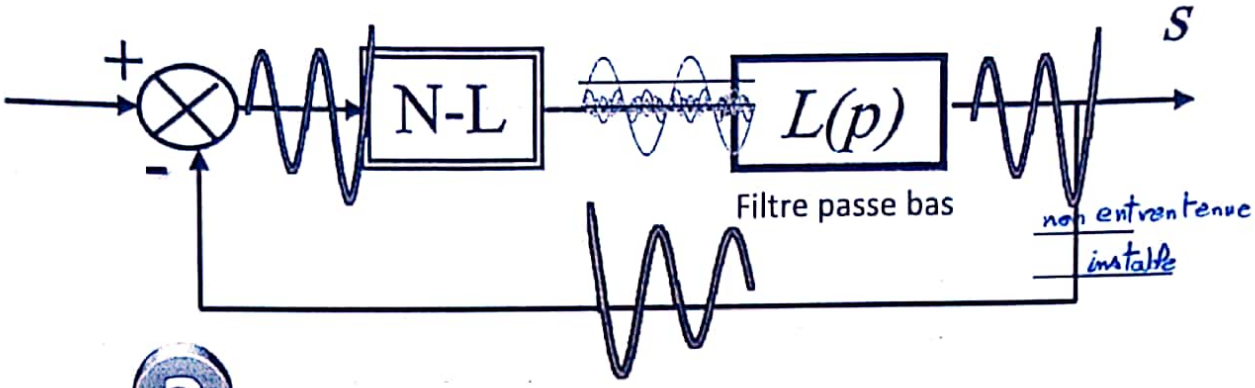
Scanné avec CamScanner

Stabilité des systèmes asservis non linéaires



Stabilité des oscillations



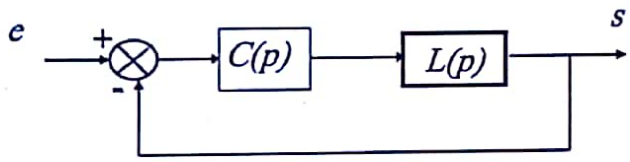




Critère de stabilité des oscillations

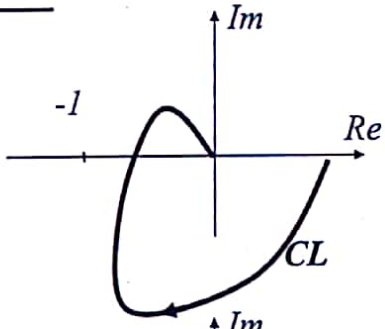
13

Stabilité des systèmes asservis
- dans le cas linéaires



Critère de stabilité : critère de Nyquist

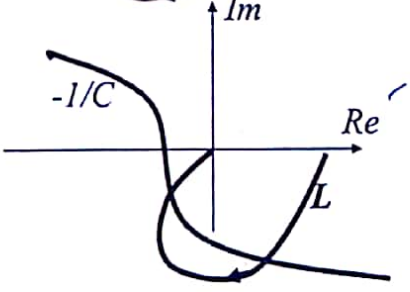
$\frac{CL}{1+CL}$ est stable si la diagramme de Nyquist de CL, parcouru dans le sens des ω positifs, laisse le **point critique** -1 à sa gauche





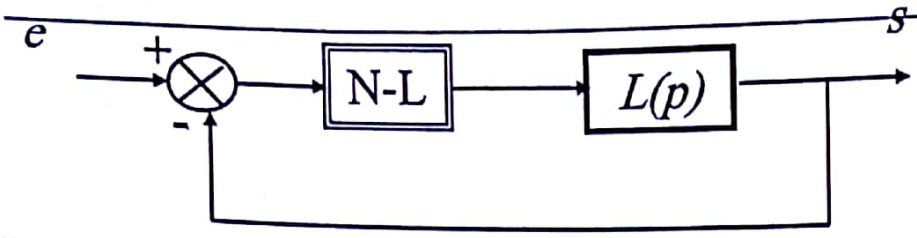


$\frac{CL}{1+CL}$ est stable si la diagramme de Nyquist de *G*, parcouru dans le sens des ω positifs, laisse le **lieu critique** *-1/C* à sa gauche

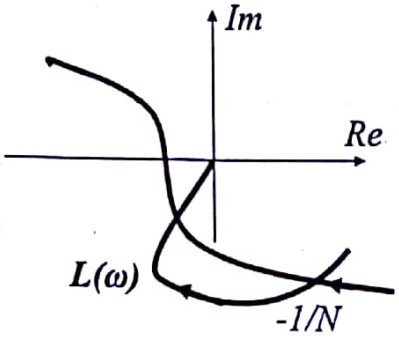


Scanné avec CamScanner

Stabilité des systèmes asservis non linéaires

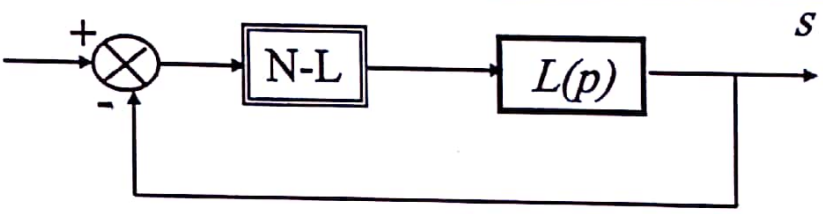


La boucle fermée est stable pour x_1 si la diagramme de Nyquist de *L*, parcouru dans le sens des ω positifs, laisse le lieu critique $-1/N(x_1)$ à sa gauche



Conditions nécessaires d'auto-oscillations

$$\frac{N(x_1)L(\omega)}{1+N(x_1)L(\omega)}$$



La condition nécessaire d'auto-oscillation :

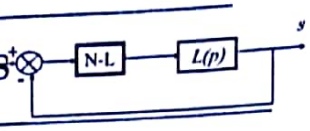
$$1 + N(x_1) L(\omega) = 0$$

Chaque solution mathématique de cette équation donne la pulsation ω_0 et l'amplitude $(x_1)_0$ d'une auto-oscillation.

$$L(\omega) = -\frac{1}{N(x_1)}$$

Scanné avec CamScanner

Conditions nécessaires d'auto-oscillations



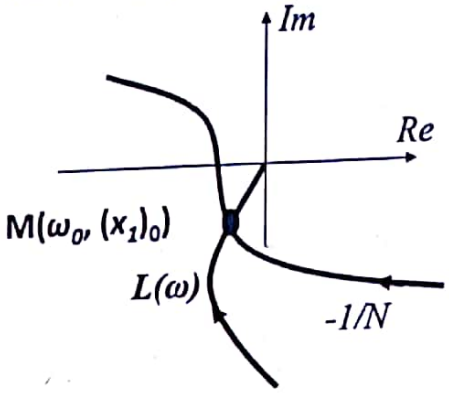
$$L(\omega) = -\frac{1}{N(x_1)}$$

Lieu critique $\boxed{C(x_1) = -\frac{1}{N(x_1)}}$

Résolution graphique

les solutions sont les intersections entre les courbes représentatives de la partie linéaire $L(j\omega)$ et du lieu critique $C(x_1)$.

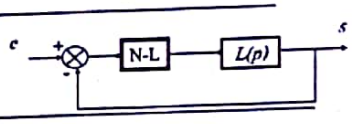
Si les deux courbes, $L(j\omega)$ et $C(x_1)$, se coupent en un point $M(\omega_0, (x_1)_0)$, la condition nécessaire d'auto-oscillation est vérifiée au point d'intersection : il existe une auto-oscillation de pulsation ω_0 et amplitude $(x_1)_0$ L'auto-oscillation ~~stable~~ peut être stable ou instable.



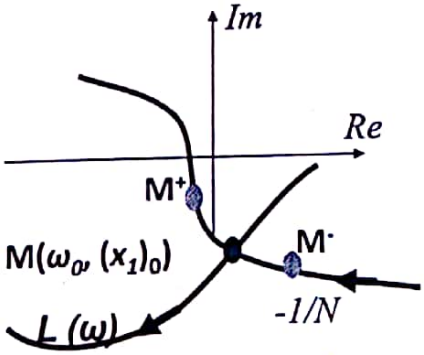
Pour que cette auto-oscillation soit stable, il faut que, si on modifie un peu l'amplitude et/ou la pulsation de l'auto-oscillation, on doit revenir vers les solutions ω_0 et $(x1)_0$

15

Stabilité des auto-oscillations



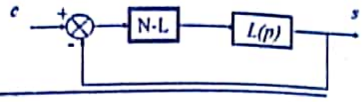
- Supposons que le système soit en **M**
- Supposons ensuite que l'amplitude x_1 baisse légèrement
- Le point **M⁻** joue le rôle du point -1/k
- En appliquant le critère du revers, la courbe **L(ω)** laisse le point **M⁻** sur sa gauche
- La réduction d'amplitude est donc stable
- Si l'amplitude commence à diminuer, elle tend à **diminuer davantage**
- L'ossillation va donc disparaitre !



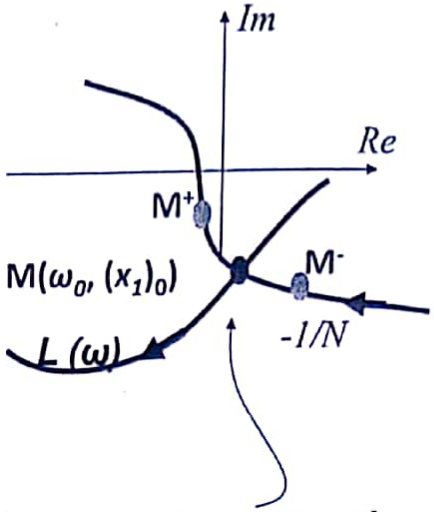
auto-oscillation

Scanné avec CamScanner

Stabilité des auto-oscillations

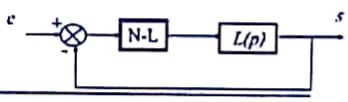


- Supposons que le système soit en **M**
- Supposons ensuite que l'amplitude x_1 augmente légèrement
- Le point M^+ joue le rôle du point -1/k
- En appliquant le critère du revers, la courbe **L(ω)** laisse le point M^+ sur sa droite
- L'augmentation d'amplitude est donc instable
- Si l'amplitude commence à augmenter, elle tend à **augmenter davantage**
- L'ossillation va donc **disparaitre** !

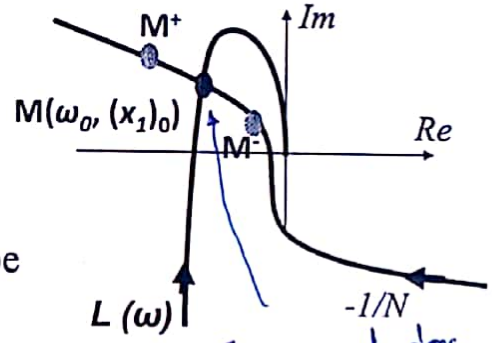


M correspond donc
auto oscillation instable

Stabilité des auto-oscillations



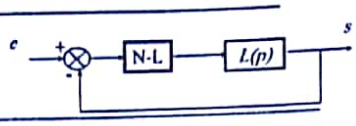
- Supposons que le système soit en **M**
- Supposons ensuite que l'amplitude x_1 baisse légèrement
- Le point M^- joue le rôle du point -1/k
- En appliquant le critère du revers, la courbe **L(ω)** laisse le point M^- sur sa droite
- La réduction d'amplitude est donc instable
- Si l'amplitude commence à diminuer, elle tend à **augmenter et elle revient à $(x_1)_0$**



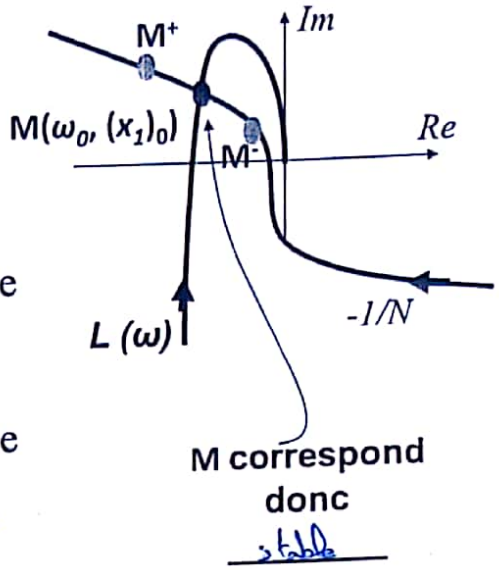
↑ correspond donc à la possibilité d'un cycle limite instable

Scanné avec CamScanner

Stabilité des auto-oscillations

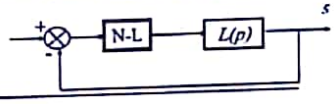


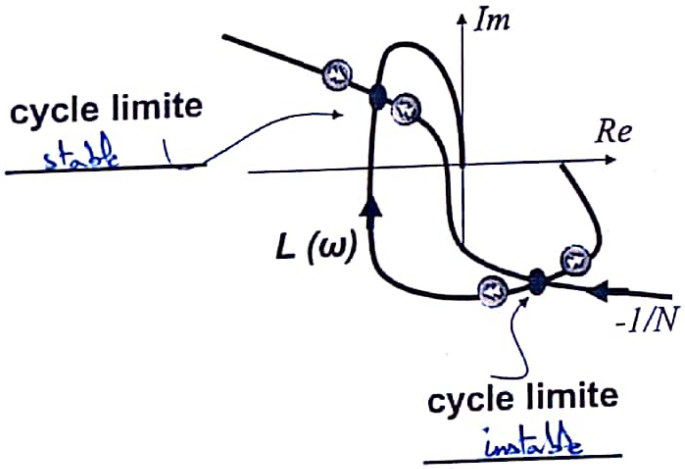
- Supposons que le système soit en **M**
- Supposons ensuite que l'amplitude x_1 augmente légèrement
- Le point M^+ joue le rôle du point -1/k
- En appliquant le critère du revers, la courbe **L(ω)** laisse le point M^- sur sa gauche
- L'augmentation d'amplitude est donc stable
- Si l'amplitude commence à augmente, elle tend à **diminuter et elle revient à $(x_1)_0$**



17

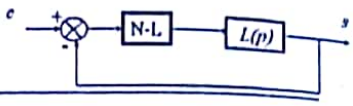
Stabilité des auto-oscillations



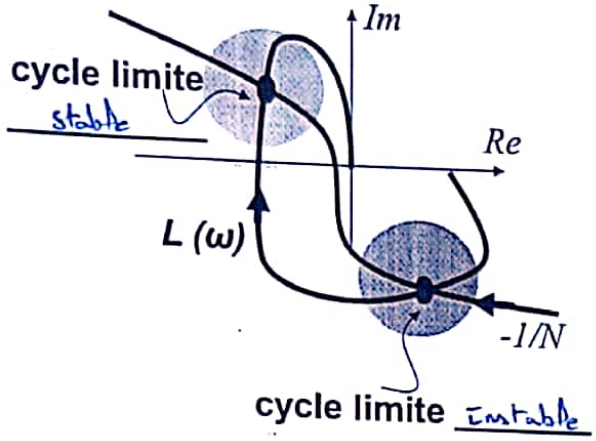


Scanné avec CamScanner

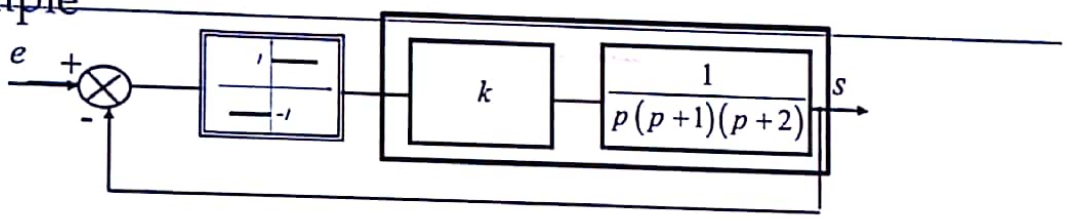
Critère géométrique de stabilité - Critère de Loeb



Critère de Loeb : Soit un cycle limite détecté comme l'intersection du lieu de Nyquist L(jω) et du lieu critique C(x0) possédant une pulsation ω~ω* et une amplitude $x_1 \sim x_1^*$. Cette oscillation est stable si l'intersection est telle qu'en parcourant le lieu de Nyquist L(ω) dans le sens des ω croissants on laisse sur sa gauche la direction des x_1 croissants sur le lieu critique.

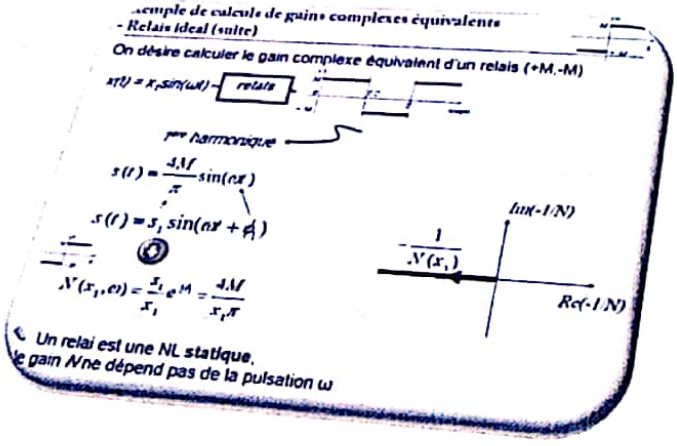


Critère géométrique de stabilité - Exemple



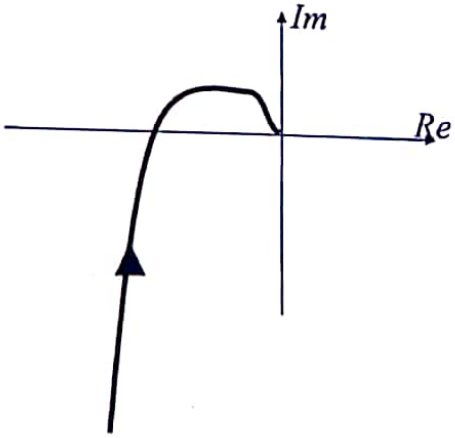
Calcul du lieu critique

$$N(x_1) = \frac{4}{x_1 \pi} \qquad C(x_1) = -\frac{\pi}{4} x_1$$



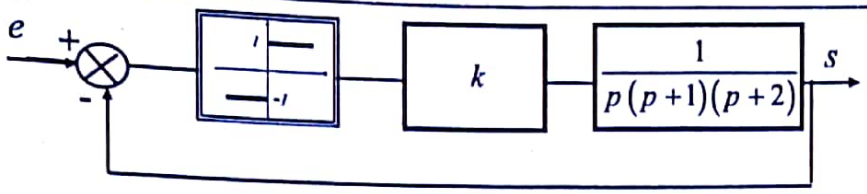
La réponse harmonique de l'élément linéaire

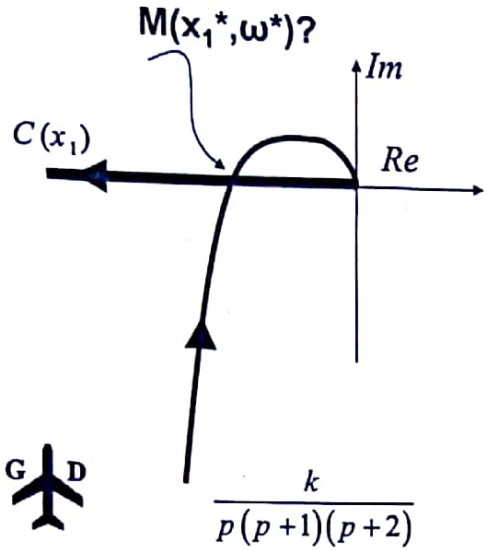
$$L(p) = \frac{k}{p(p+1)(p+2)}$$



Scanné avec CamScanner

Critère géométrique de stabilité - Exemple





ω^* ?

$$\arg L(j\omega^*) = \frac{k}{j\omega^*(j\omega^*+1)(j\omega^*+2)} = -180°$$

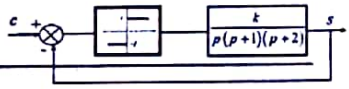
$$Im\left(L(j\omega^*)\right) = 0$$

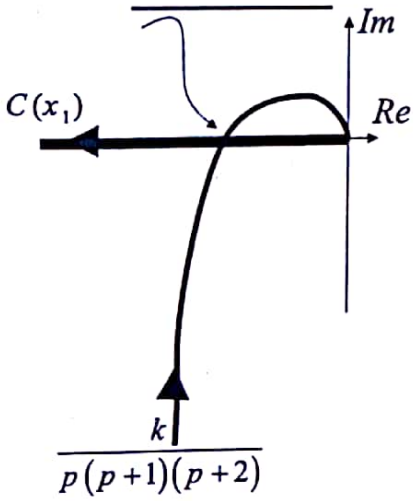
x_1^* ?

$$C(x_1^*) = -\frac{\pi}{4}x_1^* = \mathrm{Re}\left(L(j\omega^*)\right)$$

19

Critère géométrique de stabilité - Exemple





$$L(j\omega^*) = \frac{k}{j\omega^*(j\omega^*+1)(j\omega^*+2)}$$

$$= \frac{k}{j\omega^*\left(2-(\omega^*)^2+3j(\omega^*)\right)}$$

$$= \frac{k}{-3(\omega^*)^2 + j(\omega^*)\left(2-(\omega^*)^2\right)}$$

$$= k\,\frac{-3(\omega^*)^2 - j(\omega^*)\left(2-(\omega^*)^2\right)}{9(\omega^*)^4 + (\omega^*)^2\left(2-(\omega^*)^2\right)^2}$$

$$= k\,\frac{-3}{9(\omega^*)^2 + \left(2-(\omega^*)^2\right)^2} - jk\,\underbrace{\frac{\left(2-(\omega^*)^2\right)}{9(\omega^*)^3 + (\omega^*)\left(2-(\omega^*)^2\right)^2}}_{0}$$

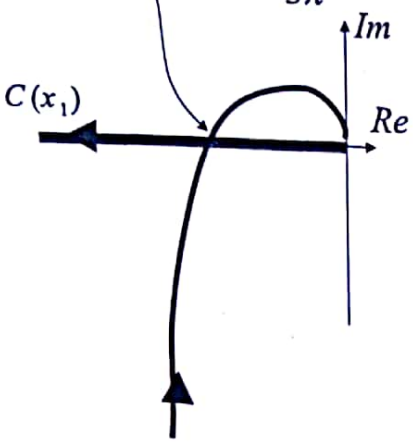
$$L(j\omega^*) = \frac{-k}{6} \quad \omega^* = \sqrt{2}$$

$$C(x_1^*) = -\frac{\pi}{4}x_1^* = \mathrm{Re}\left(L(j\omega^*)\right) \quad x_1^* = \frac{2}{3\pi}k$$

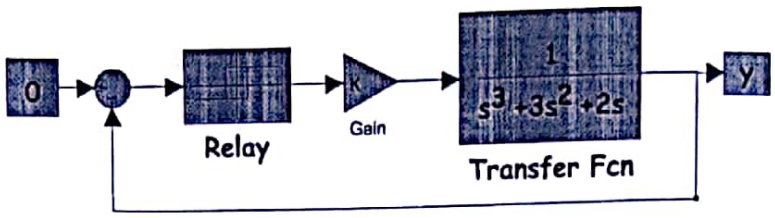
Scanné avec CamScanner

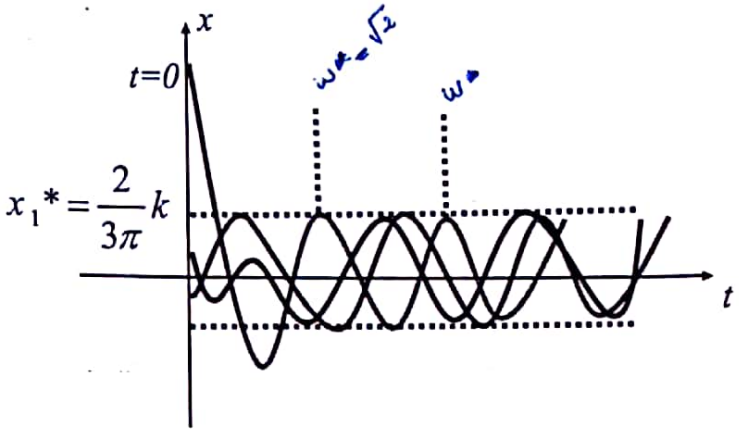
Critère géométrique de stabilité - Exemple

M($x_1^* = \frac{2}{3\pi}k$, $\omega^* = \sqrt{2}$)



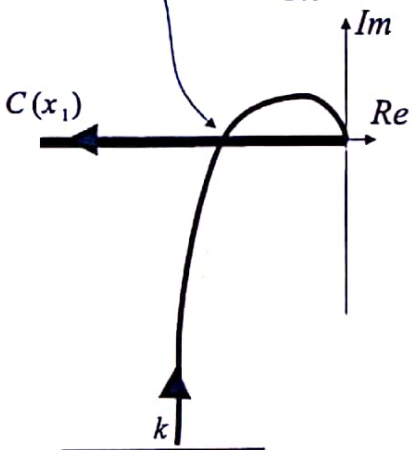
$$\frac{k}{p(p+1)(p+2)}$$





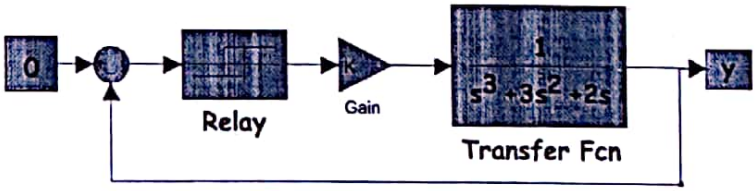
Critère géométrique de stabilité - Exemple

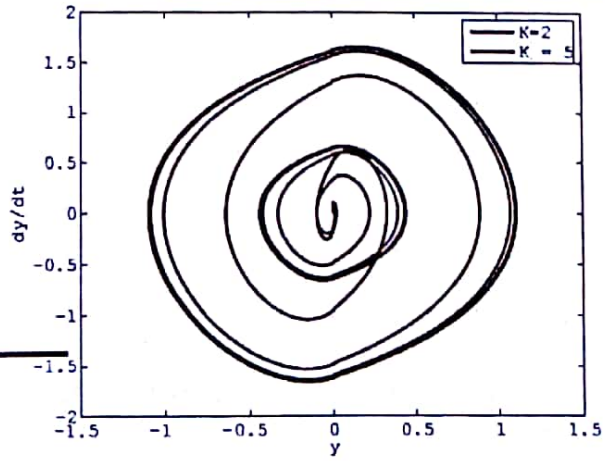
M($x_1^* = \frac{2}{3\pi}k$, $\omega^* = \sqrt{2}$)



$$\frac{k}{p(p+1)(p+2)}$$

Critère de Loeb : cycle limite stable

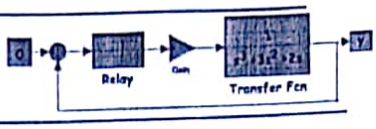


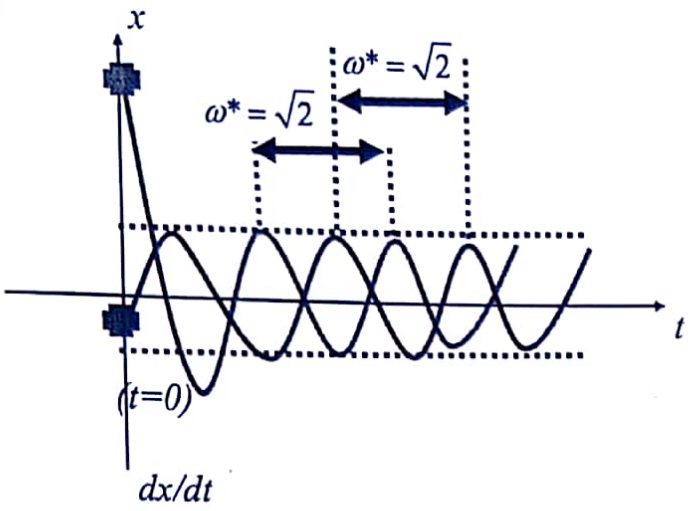


oscillation libre

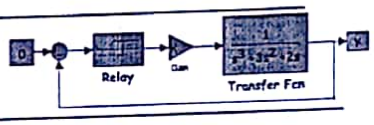
Scanné avec CamScanner

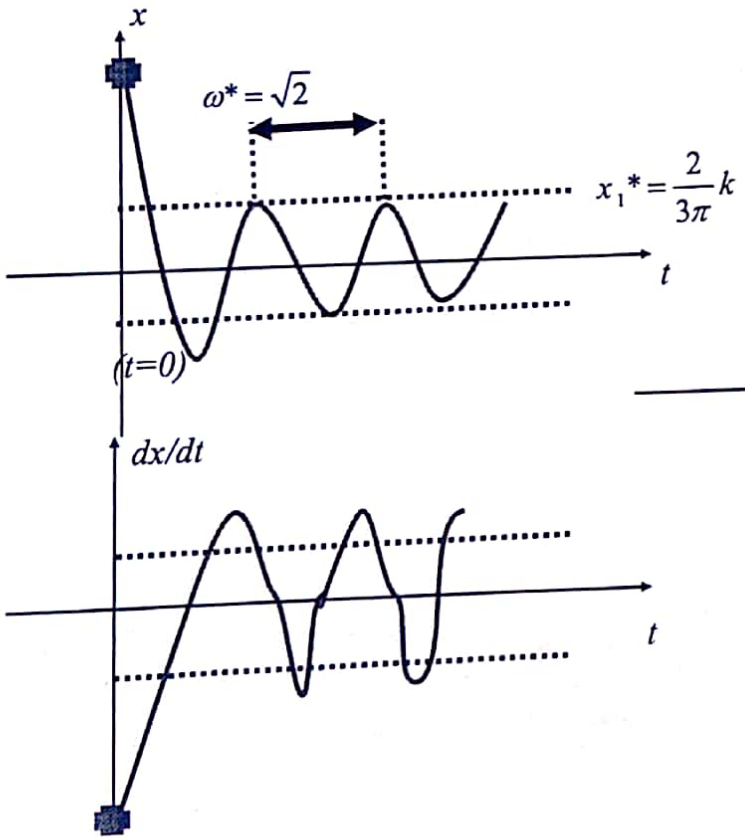
Critère géométrique de stabilité - Exemple

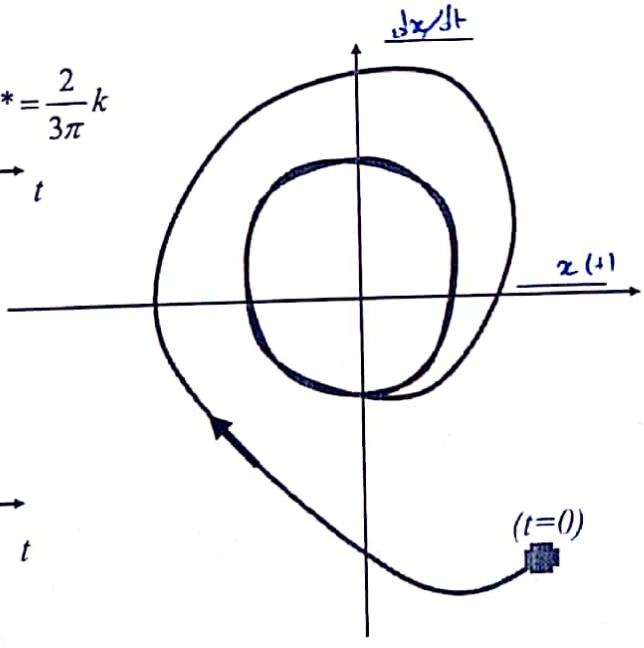




Critère géométrique de stabilité - Exemple

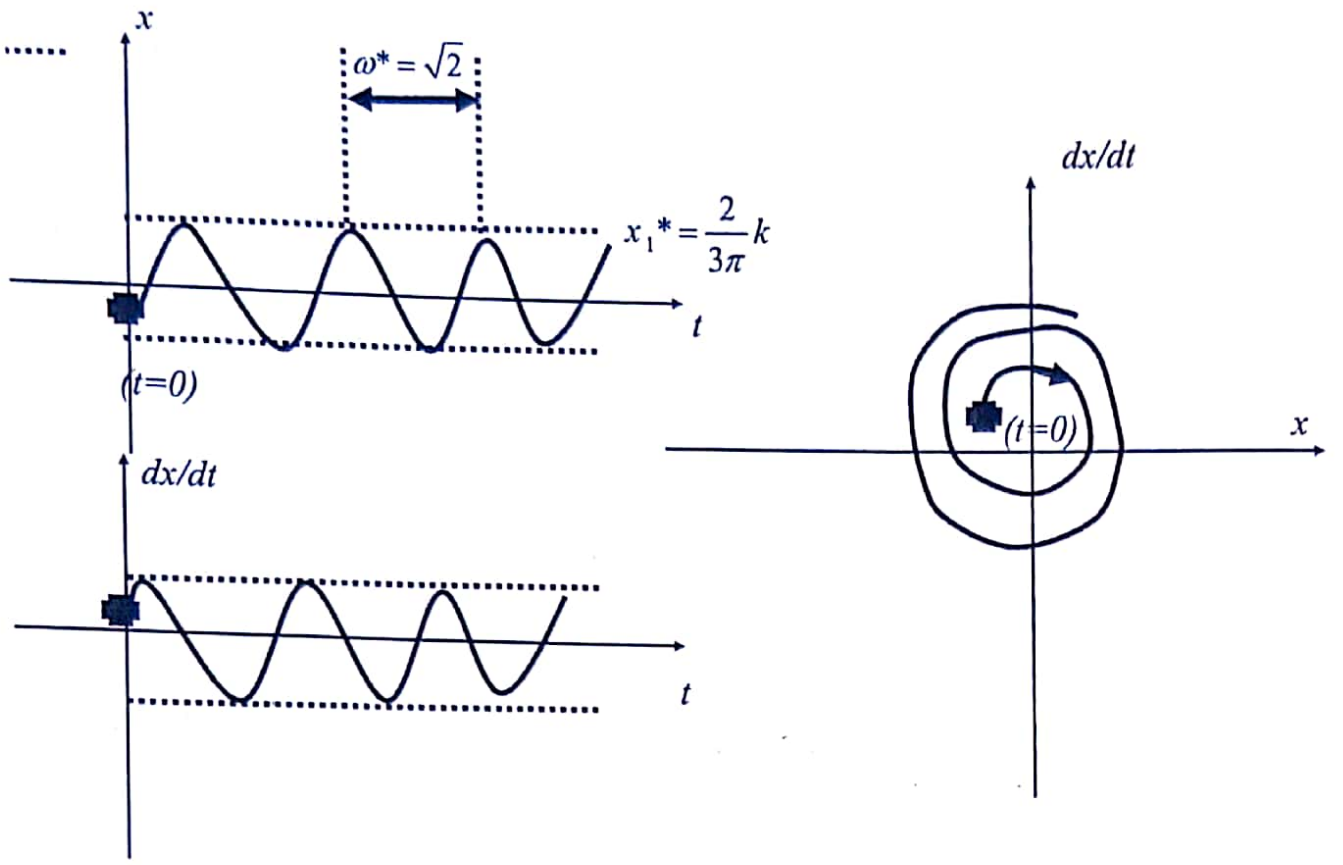




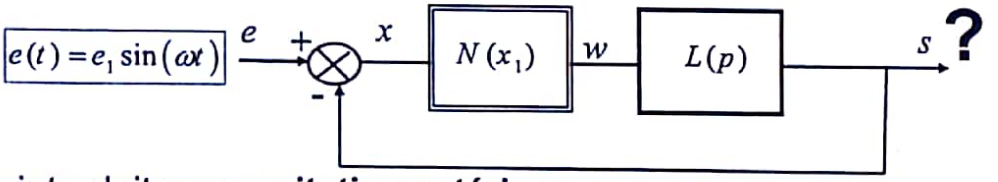


Scanné avec CamScanner

Critère géométrique de stabilité - Exemple



Oscillations forcées -Repenses en fréquences de l'asservissement NL



On introduit une **excitation extérieure** :

$$x = e - s$$
$$= e - L(j\omega)N(x_1)x$$

$$x = e - s$$
$$(1 + L(j\omega)N(x_1))x = e$$

$$(1 + L(j\omega)N(x_1))x_1 e^{j(\omega t + \phi)} = e_1 e^{j\omega t}$$

$$x_1 e^{j\phi} = \frac{1}{(1 + L(j\omega)N(x_1))} e_1$$

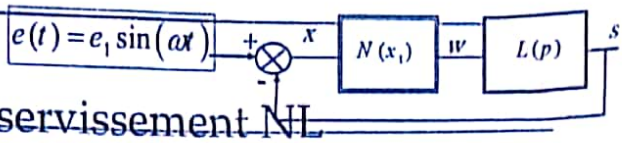
Repenses en fréquences de l'asservissement NL

$$\begin{cases} x_1 = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)N(x_1)} \right| e_1 \\ \phi = \arg\left(\frac{1}{(1 + L(j\omega)N(x_1))} \right) \end{cases}$$

chaque couple solution (x_1 , Φ) correspond à la possibilité d'existence d'une oscillation forcée

Scanné avec CamScanner

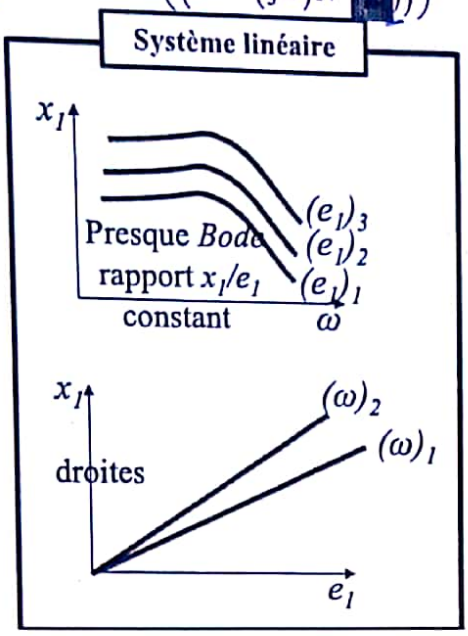
Oscillations forcées
-Repenses en fréquences de l'asservissement NL

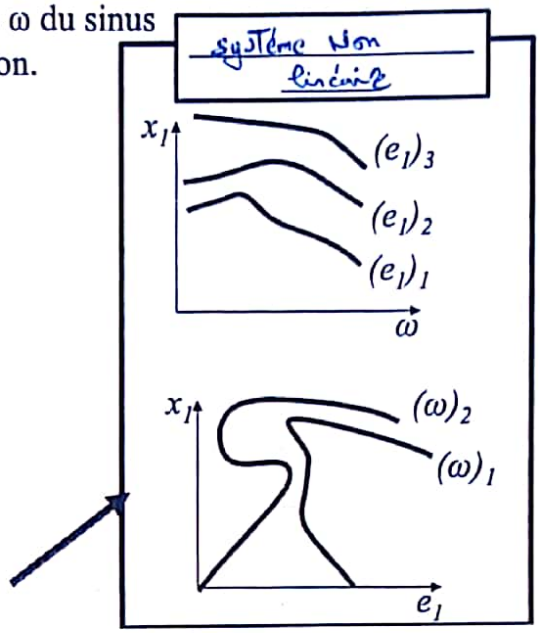


$$\begin{cases} x_1 = \left|\dfrac{1}{1+L(j\omega)N(\quad)}\right| e_1 \\ \arg(x) = \arg\left(\dfrac{1}{(1+L(j\omega)N(\quad))}\right) \end{cases}$$

Dans le cas NL, l'amplitude x_1 de l'oscillation de sortie dépend de l'amplitude e_1 et la fréquence ω du sinus d'excitation.

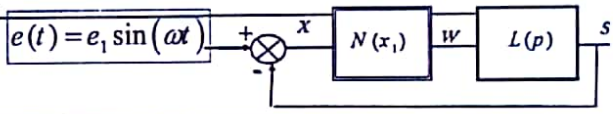
$$\begin{cases} x_1 = \left|\dfrac{1}{1+L(j\omega)N(x_1)}\right| e_1 \\ \arg(x) = \arg\left(\dfrac{1}{(1+L(j\omega)N(x_1))}\right) \end{cases}$$



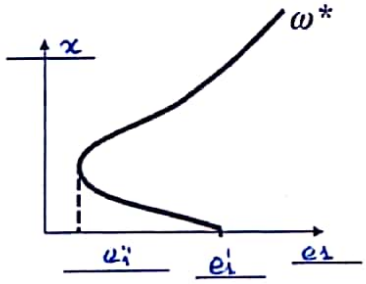


23

Oscillations forcées
- Cas d'une synchronisation



Soit l'exemple suivant, pour ω= ω*



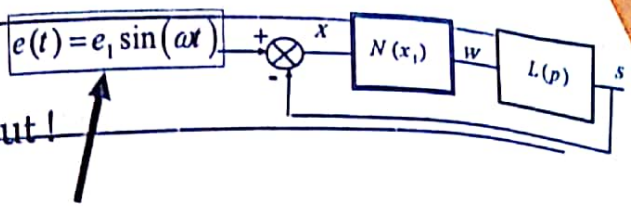
- ❑ Si $e_1 < e''_1$ *pas de solution donc pas d'oscillation*
- ❑ Si $e''_1 < e_1 < e'_1$ *deux solutions donc 2 oscillations possibles (selon les CI)*
- ❑ Si $e'_1 < e_1$ *une unique solution donc une seule oscillation*

e''_1 est un seuil au dessous duquel il n'y pas d'oscillation possible
Il est appelé ***seuil de synchronisation*** *ou* ***seuil de coupure***

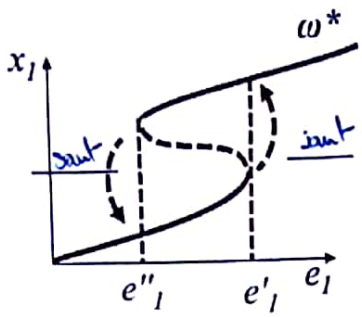
Scanné avec CamScanner

Oscillations forcées

- ~~Cas d'une synchronisation avec saut !~~



Soit l'exemple suivant, pour $\omega = \omega^*$



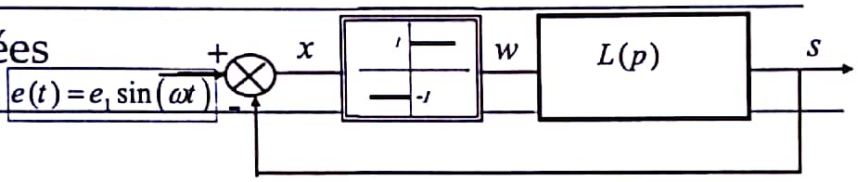
- Si on augmente régulièrement e_1 , lorsque $e_1 > e'_1$ alors augmentation brutale de l'amplitude de sortie (et x)
- Si $e_1 > e'_1$ *et* on diminue régulièrement e_1 , lorsque $e_1 < e''_1$ alors diminution brutale de l'amplitude de sortie

Le phénomène de saut existe lorsque l'amplitude de x_1 de l'oscillation forcée varie de manière discontinue en fonction de e_1

84

Oscillations forcées

- ~~exemple~~

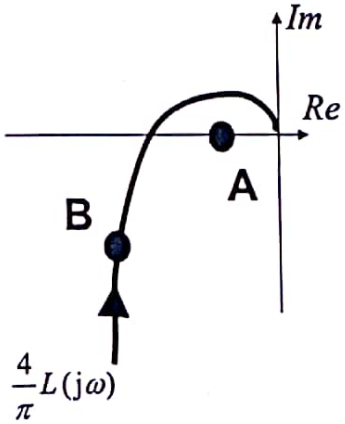


$$N(x_1)=\frac{4}{x_1\pi}$$

$$\begin{cases} x_1 = \left|\dfrac{1}{1+L(j\omega)N(x_1)}\right| e_1 \\ \arg(x) = \arg\left(\dfrac{1}{(1+L(j\omega)N(x_1))}\right) \end{cases} \qquad \left|1+L(j\omega)\frac{4}{\pi x_1}\right| x_1 = e_1 \qquad \left|x_1+L(j\omega)\frac{4}{\pi}\right| = e_1$$

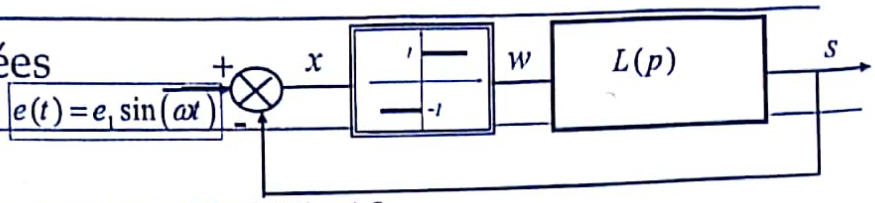
Pour un ω donnée, dans le plan complexe, e_1 est la distance entre le point B : $L(j\omega)\frac{4}{\pi}$ et le point A : $(-x_1)$

Est-ce qu'il existe toujours des solutions ? (oscillations) ?



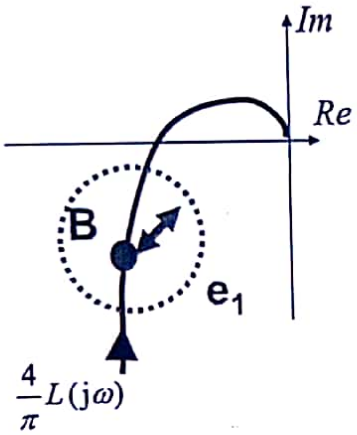
Scanné avec CamScanner

Oscillations forcées - exemple



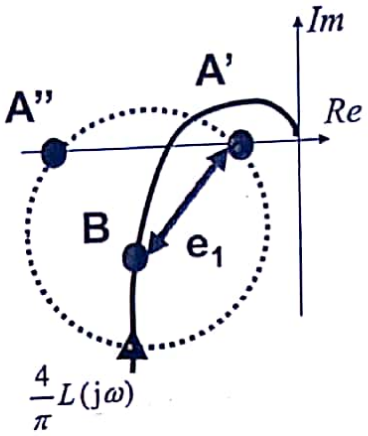
Est-ce qu'il existe toujours des solutions ? (oscillations) ?

Si e_1 est faible (inferieur à un certain seuil)



Il n'existe aucune solution pas d'oscillation forcé

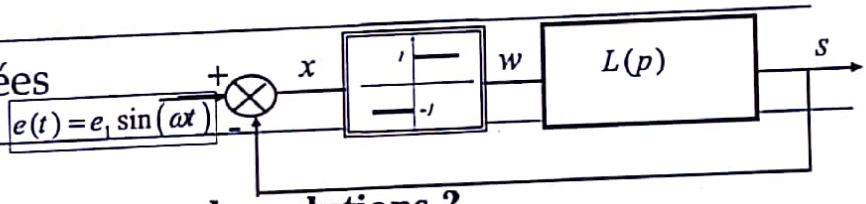
Si e_1 est suffisamment grand (supérieur à un certain seuil)



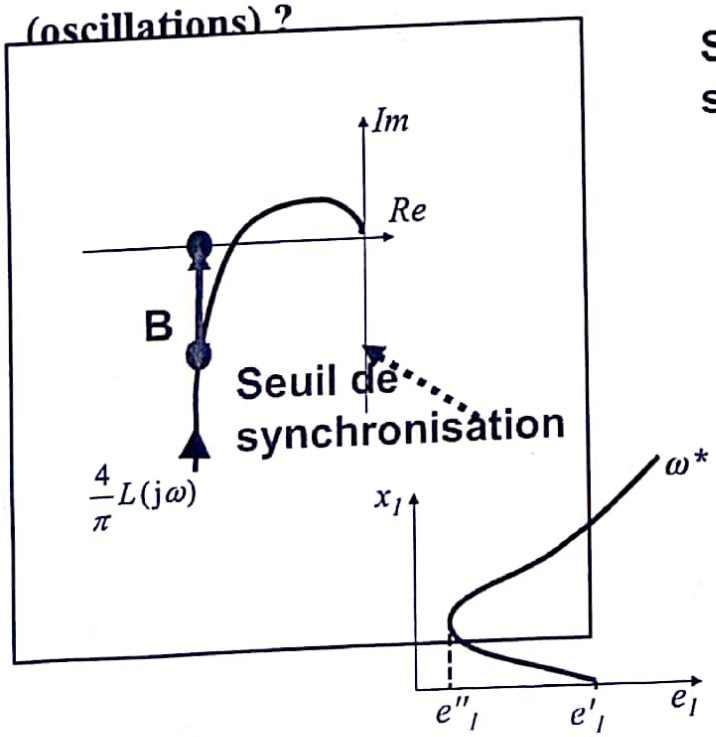
Il existe 2 solutions (2 oscillations forcées sont possibles)

25

Oscillations forcées - exemple



Est-ce qu'il existe toujours des solutions ? (oscillations) ?

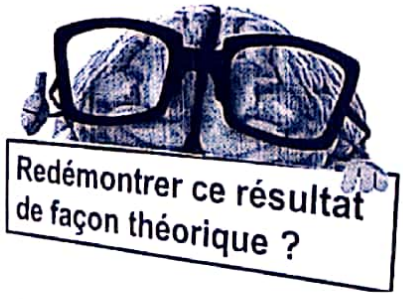


Seuil de synchronisation

$$e_1 = -\frac{4}{\pi} \mathrm{Im}\left(L(j\omega)\right)$$

avec

$$x_1 = \frac{4}{\pi} \mathrm{Re}\left(L(j\omega)\right)$$



Scanné avec CamScanner

a partir d'une condition initial donné le système peut converger ou bevergé en regime libre